

## INTERMITTENZ UND STRUKTURFUNKTIONEN

### Selbstähnlichkeit

Um Intermittenz zu erklären ist es hilfreich zu wissen, was Selbstähnlichkeit ist. Rechts dargestellt ist ein Dreieck, das wiederum aus Dreiecken besteht, usw. Die Dreieckstruktur ist immer wieder zu finden, egal wie weit man in die Struktur „hineinzoomt“. Hierbei handelt es sich um das Sierpiskidreieck.

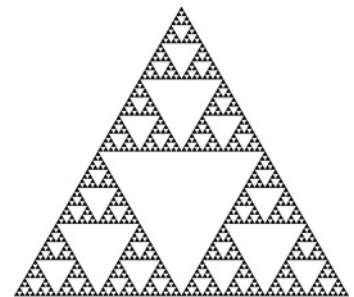


Abb. 1. Sierpiskidreieck

Selbstähnliche Funktionen sind Funktionen mit einer bestimmten Struktur, die bei beliebig weitem „Hineinzoomen“ wieder die gleiche (bzw. ähnliche) Struktur aufweisen.

Das nächste Beispiel (Abb. 2) zeigt ein Signal, das ebenfalls selbstähnlich ist, allerdings nicht „rein“ selbstähnlich: bei genauer Betrachtung eines Ausschnitts sind qualitativ ähnliche Strukturen zu sehen.

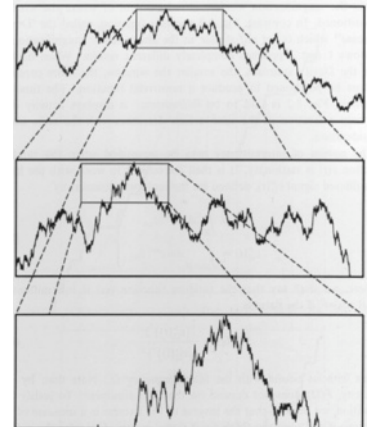
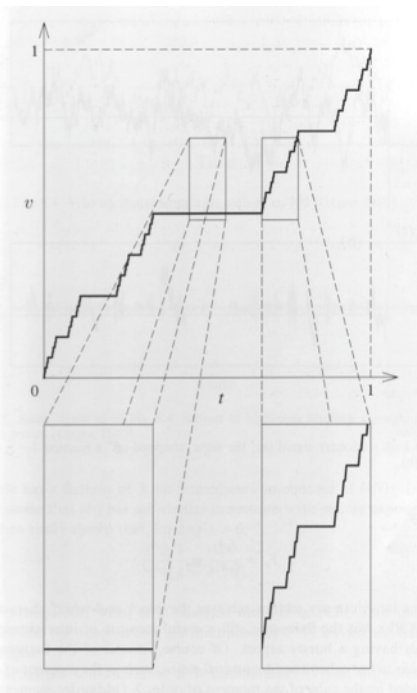


Abb. 2. Selbstähnliches Signal



### Intermittenz

In dieser sogenannten Devil's Staircase Funktion (Abb. 3) ist eine treppenartige Struktur erkennbar. Die Vergrößerung des rechten Ausschnitts zeigt wieder eine ähnliche, stufige Funktion. Betrachtet man hingegen die Vergrößerung unten links, so ist dort keine Ähnlichkeit mit dem ursprünglichen Graphen zu sehen. An dieser Stelle ist die Ähnlichkeit unterbrochen.

intermittere (lat.) = unterbrechen

Abb. 3. Devil's Staircase, eine intermittente Funktion

Intermittenz ist ein typisches Phänomen der nichtlinearen Dynamik. Es tritt beim Übergang vom periodischen zum chaotischem Zeitverhalten auf. Dabei werden zeitlich-unregelmäßig verschiedene Zustände eingenommen.

Als Beispiel für das Auftreten von Intermittenz sei hier der Sonnenwind genannt: der ionisierte Teilchenstrom entspringt der Sonne und wird kontinuierlich, aber ungleichmäßig in die Heliosphäre geblasen, wobei verschiedene periodische Strömungen (aus langsamen/schnellem Sonnenwind, Geschwindigkeitsfluktuationen durch Sonnenflecken) sich überlagern und turbulent werden.

Die Ursachen für Intermittenz sind vielfältig. Zum Beispiel kann starkes Rauschen oder Bifurkation intermittentes Verhalten verursachen.

Rechts ist eine Momentaufnahme einer Computersimulation abgebildet, die intermittente Turbulenz-Strukturen in einem dreidimensionalen Fluid zeigt: große Wirbel zerfallen in immer kleinere Wirbel, bis die Bewegungsenergie schließlich dissipiert. In diesem dynamischen Vorgang entstehen spontan die abgebildeten, länglichen Strukturen („Fäden“).

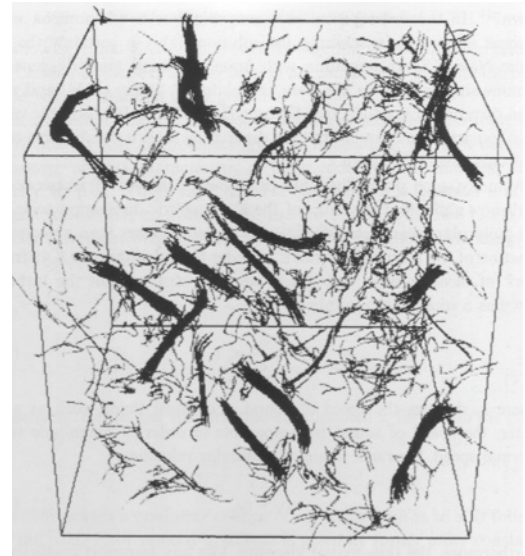


Abb. 4. Computersimulation, Jackson 1991

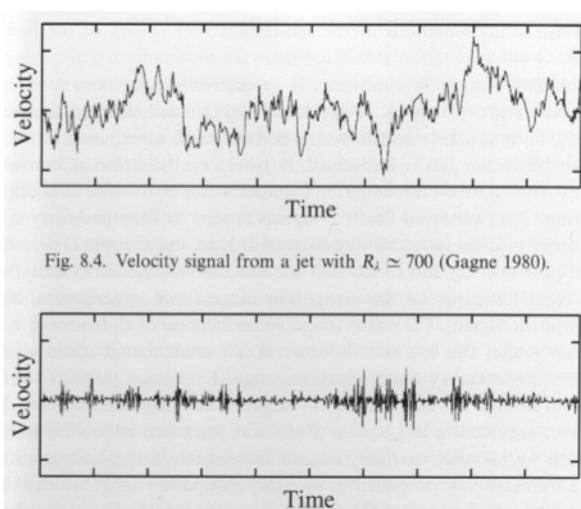


Abb. 5. Geschwindigkeit eines Jets; unten gefiltert

### Untersuchung turbulenter Funktionen

Wenn man das Signal der Abbildung 5 oben betrachtet, so könnte behauptet werden, es wäre selbstähnlich. Erst nach genauerer Untersuchung ist intermittentes Zeitverhalten (unten) zu erkennen: es gibt ruhige Abschnitte, die durch starke Ausbrüche (intermittent bursts) unterbrochen werden.

Dazu wird das ursprüngliche Signal gefiltert. Es kommt auf die richtige Filterfrequenz  $\Omega$  an, damit das resultierende Signal als Intermittenz interpretiert werden kann. Um die richtige Frequenz zu wählen, sind zwei Bedingungen zu erfüllen:

Einerseits muß  $\Omega$  kleiner als der Kolmogorov-Dissipationsbereich sein, da dieser gerade untersucht werden soll.

Andererseits ist es hilfreich die tieferen Frequenzen wegzufiltern, denn Intermittenz tritt im kleinskaligen Bereich (hohe Frequenzen) auf.

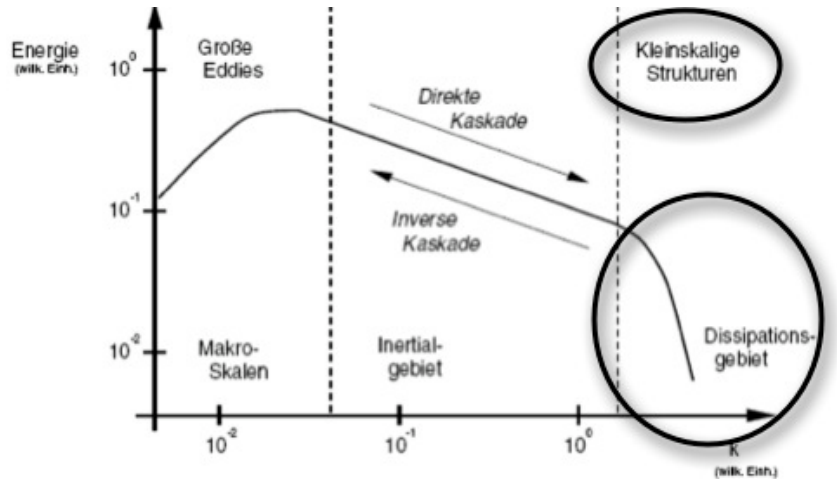


Abb. 6. Schematische Energieverteilung einer Turbulenz

Man betrachte die Richardson Kaskade, die den Zerfall von großen Wirbeln (aus extern hinzugefügter Energie) in immer kleinere Wirbel bis hin zum Dissipationsbereich beschreibt. Im Dissipationsbereich sind die Wirbel so klein, daß die Viskosität des Fluids eine größere Rolle spielt. Die Bewegungsenergie wird in Wärmeenergie umgewandelt und entweicht.

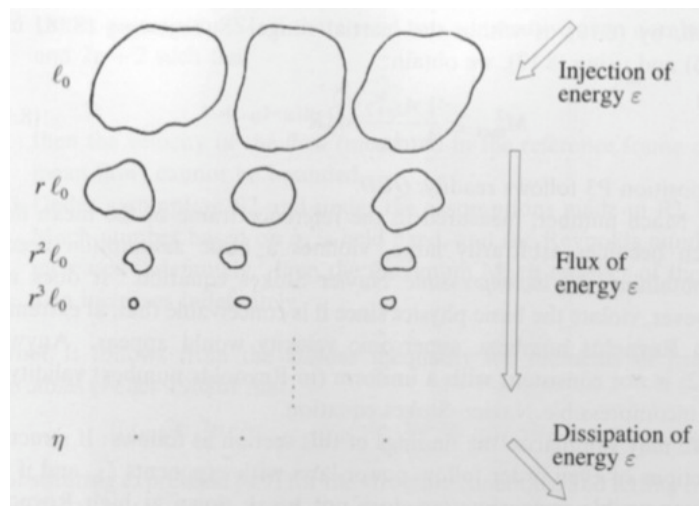


Abb. 7. Kaskade

Durch die Hochpassfilterung wird der niederfrequente Anteil (Energiezufuhr und direkte Kaskade) vernachlässigt.

### Hochpassfilterung und Flachheit

Eine Fouriertransformation eignet sich gut, um zeitabhängige Signale mathematisch zu beschreiben, wie hier die Geschwindigkeitsfunktion  $v(t)$ . Nun kann eine sinnvolle Filterfrequenz eingesetzt werden.

Danach wird die Flachheit (flatness)  $F(\Omega)$  der Funktion berechnet (Definition rechts): die gefilterte Transformation wird eingesetzt, potenziert und über die Zeit gemittelt. Mit dem Flachheitskriterium können intermittente Stellen sichtbar gemacht werden, die sonst (im ursprünglichen Signal) im gesamten Frequenzspektrum untergingen.

$$v(t) = \int_{\mathbb{R}^3} d\omega e^{i\omega t} \hat{v}_\omega,$$

$$v_\Omega^>(t) = \int_{|\omega|>\Omega} d\omega e^{i\omega t} \hat{v}_\omega$$

$$F(\Omega) = \frac{\langle (v_\Omega^>(t))^4 \rangle}{\langle (v_\Omega^>(t))^2 \rangle^2}$$

Statt der Flachheit können auch andere geeignete dimensionslose Verhältnisse zur Beschreibung der gefilterten Kurve benutzt werden.

## Nicht intermittentes Verhalten

Rein selbstähnlichen Funktionen (wie z.B. beim Sierpiskidreieck der Fall) und Funktionen, die normalverteilt sind (Abb. 8) weisen kein intermittentes Verhalten auf. Begründung: die Flachheit  $F(\Omega)$  ist unabhängig von  $\Omega$ .

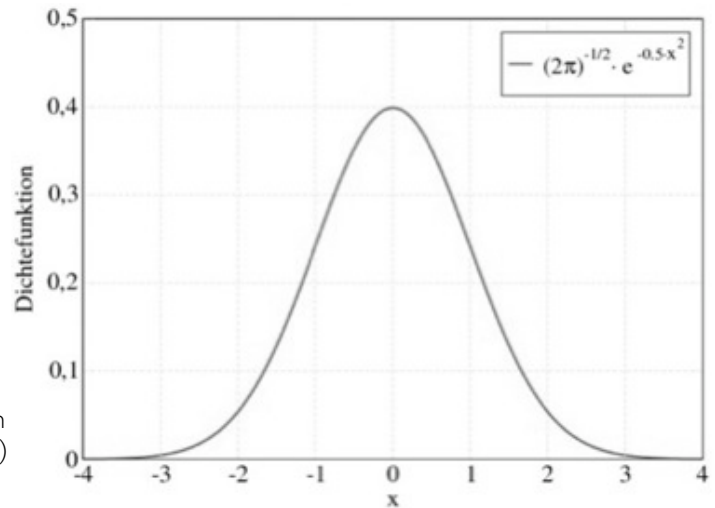


Abb. 8. Gauß-verteilte Funktion (normale Häufigkeitsverteilung)

## Beschreibung mittels Strukturfunktionen, als statistisches Maß für Intermittenz

Intermittenz kann auch mit Strukturfunktionen beschrieben werden. Dies ist eine allgemeine Definition einer Strukturfunktion  $S$  der Ordnung  $p$ :

$$S_p(\ell) \equiv \langle (\delta v_{\parallel}(\ell))^p \rangle.$$

Sie ist abhängig von Geschwindigkeitsfluktuationen  $\delta v$ , die wiederum vom Abstand  $l$  zum nächsten Messpunkt abhängen (Beispiel Windkanal, Abb. 9). Mit der Definition der longitudinalen Geschwindigkeitsänderung

$$\delta v_{\parallel}(r, \ell) \equiv [v(r + \ell) - v(r)] \cdot \frac{\ell}{\ell},$$

lässt sich beispielsweise die zeitlich gemittelte Strukturfunktion zweiter Ordnung berechnen:

$$S_2(\ell) \equiv \langle (\delta v_{\parallel}(\ell))^2 \rangle$$

## S<sub>2</sub>-Messung im Windkanal

Als Beispiel einer Intermittenzmessung sei hier der Windkanal vom französischen Forschungsunternehmen ONERA erwähnt. Bei Windgeschwindigkeiten

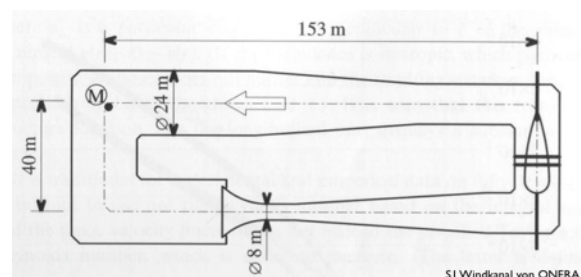


Abb. 9. Windkanal von ONERA

um 20m/s und hohen Reynoldszahlen von  $3 \times 10^7$  wurden Geschwindigkeitsfluktuationen von 7% (longitudinal) gemessen.

Die doppelt logarithmische Darstellung der Strukturfunktion 2. Ordnung als Funktion des Abstands  $l$  (Abb. 10) lässt erkennen, daß die Messpunkte in guter Näherung eine Gerade mit Steigung  $2/3$  bilden. Dies ist also der Exponent der Strukturfunktion 2. Ordnung.

Folgender Zusammenhang besteht zwischen den Exponenten der Strukturfunktion und des Energiespektrums:

$$l^{(2/3)} \triangleq k^{-(5/3)}$$

Der Exponent  $2/3$  der Strukturfunktion  $S_2(l)$  ist äquivalent zum Exponenten  $-5/3$  des Energiespektrums  $E(k)$ .

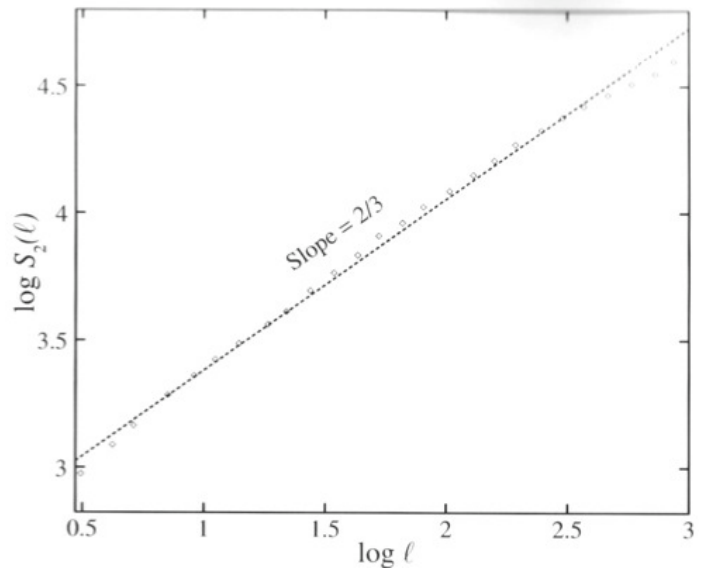


Abb. 10. Ergebnis einer experimentellen Messung im Windkanal

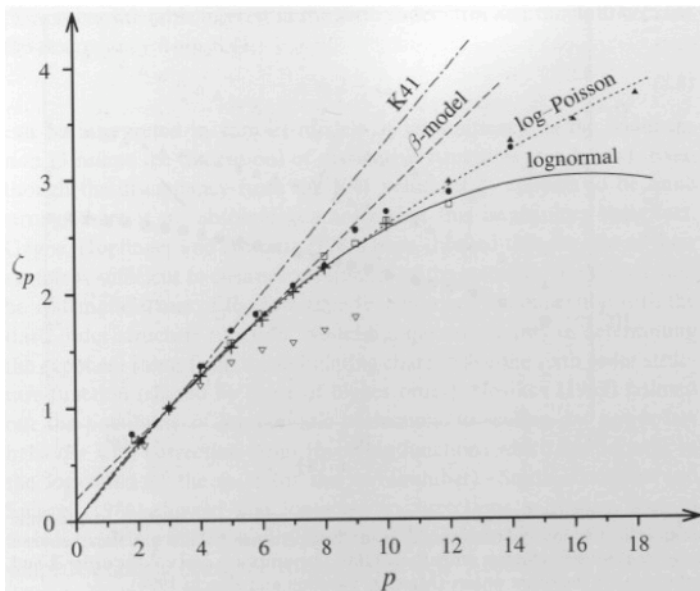


Abb. 11, Ergebnisse der Exponentenmessung, 1984 zusammengestellt von Anselmet, Gagne, Hopfinger und Antonia

Das K41-Modell berücksichtigt keine Intermittenz. Die Abweichung von K41 ist also ein Maß für Intermittenz. Die Abbildung zeigt: bei höher Ordnung  $p$  ist auch die Abweichung zu anderen Intermittenz-Modellen (z.B.  $\beta$ -Modell) größer.

## Experimentelle Ergebnisse

Kolmogorov hat in den 40er Jahren Voraussagen für die Ordnungen  $p=2$  und  $p=3$  gemacht. Der Exponent von  $S_3$  entspricht etwa dem  $4/5$ -Gesetz.

Strukturfunktionen höherer Ordnung sind im Allgemeinen schwerer zu messen. Früher reichten die Aufnahmekapazitäten der Messgeräte oft nicht aus.

Die Darstellung der Exponenten als Funktion der Ordnung  $p$  (Abb. 11) zeigt, wie die experimentell gemessenen Exponenten von Kolmogorovs K41-Theorie abweichen.

## Quellenangaben

Selbstähnlichkeit:

- Abb. 1: <http://de.wikipedia.org/wiki/Bild:Sierpinski-Trigon-7.svg>
- Abb. 2: Uriel Frisch, Turbulence, Kap. 8 Abb. 8.1, Seite 121

Intermittenz:

- Abb. 3: Uriel Frisch, Turbulence, Kap. 8 Abb. 8.2, Seite 123
- <http://exp1.fkp.physik.tu-darmstadt.de/arbeitsgebiete/intermittenz.html>
- Abb. 4: Uriel Frisch, Turbulence, Kap. 7 Abb. 7.4, Seite 109

Untersuchung turbulenter Funktionen:

- Abb. 5: Uriel Frisch, Turbulence, Kap. 8 Abb. 8.4, Seite 125
- Abb. 6: Uriel Frisch, Turbulence, Kap. 5 Abb. 5.8, Seite 66
- Abb. 7: Uriel Frisch, Turbulence, Kap. 7 Abb. 7.2, Seite 104

Hochpassfilterung und Flachheit:

- Uriel Frisch, Turbulence, Kap. 8, Seite 122 ff

Nicht intermittentes Verhalten:

- Abb. 8: [http://www.business-wissen.de/uploads/pics/Normalverteilung\\_150.gif](http://www.business-wissen.de/uploads/pics/Normalverteilung_150.gif)

Beschreibung mittels Strukturfunktionen:

- Uriel Frisch, Turbulence, Kap. 5, Seite 57 f
- <http://solarphysics.livingreviews.org/open?pubNo=lrsp-2005-4&page=articlesu22.html>

S2-Messung im Windkanal:

- Abb. 9: Uriel Frisch, Turbulence, Kap. 5 Abb. 5.2, Seite 59
- Abb. 10: Uriel Frisch, Turbulence, Kap. 5 Abb. 5.1, Seite 58
- Uriel Frisch, Turbulence, Kap. 5, Seite 61 f

Experimentelle Ergebnisse:

- Abb. 11: Uriel Frisch, Turbulence, Kap. 8 Abb. 8.8, Seite 132